

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ХИЩНИК-ЖЕРТВА С ИДЕАЛЬНЫМ СВОБОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Зеленчук П. А.

- **Нелинейность большинства задач популяционной динамики не позволяет получить аналитическое решение.**
- **Численное моделирование в двумерных и трехмерных областях требует значительных вычислительных ресурсов.**
- **В качестве альтернативы эффективным подходом является построение приближенных асимптотических решений.**
- **Данные решения дают качественное понимание поведения системы и выявляют основные механизмы управления ее параметрами.**

Цель работы – рассмотреть построении асимптотик стационарных распределений в уравнениях диффузии-реакции для систем хищник-жертва и двух конкурирующих популяций.

Особый интерес представляют случаи с идеальным свободным распределением (ИСП), позволяющим реализовать эволюционно стабильную стратегию (ЭСС) выбранной популяции или всей системы.

Рассмотрим два биологических вида $u(x, t)$ и $v(x, t)$ взаимодействующих на одномерном ареале $\Omega = [0, 1]$, неоднородность которого задается неравномерным распределением обобщенной функцией ресурса $p(x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_1(u, v, p(x)) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F_2(u, v, p(x)) \end{cases} \quad (1)$$

F_1, F_2 – нелинейные функции локального взаимодействия, а d_1, d_2 независящие от координаты малые коэффициенты диффузии, подчиняющиеся условию

$$d_1 = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad d_2 = \gamma \varepsilon, \quad \gamma > 0 \quad (2)$$

Система (1) дополняется начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (3)$$

и условиями периодичности

$$u(0, t) = u(1, t), \quad v(0, t) = v(1, t), \quad (4)$$

Анализ системы (1) будем вести в предположении, что вырожденная задача

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F_1(u, v, p(x)) \\ \frac{dv}{dt} = F_2(u, v, p(x)) \end{cases} \quad (5)$$

**имеет стационарные решения, удовлетворяющие ИСР и существованию
обоих видов ($u(x) > 0, v(x) > 0$).**

Пусть два вида взаимодействуют по принципу хищник-жертва

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left[\mu_1 \left(1 - \frac{u}{p} \right) - \lambda_1 \frac{v}{p} \right] \\ \frac{dv}{dt} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \left[\mu_2 \frac{u}{p} - \lambda_2 \right] \end{cases} \quad (6)$$

стационарное решение для вырожденной задачи будет иметь вид

$$u = \frac{\lambda_2}{\mu_2} p, \quad v = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) p \quad (7)$$

условие его устойчивости

$$\lambda_2 < \mu_2 \quad (8)$$

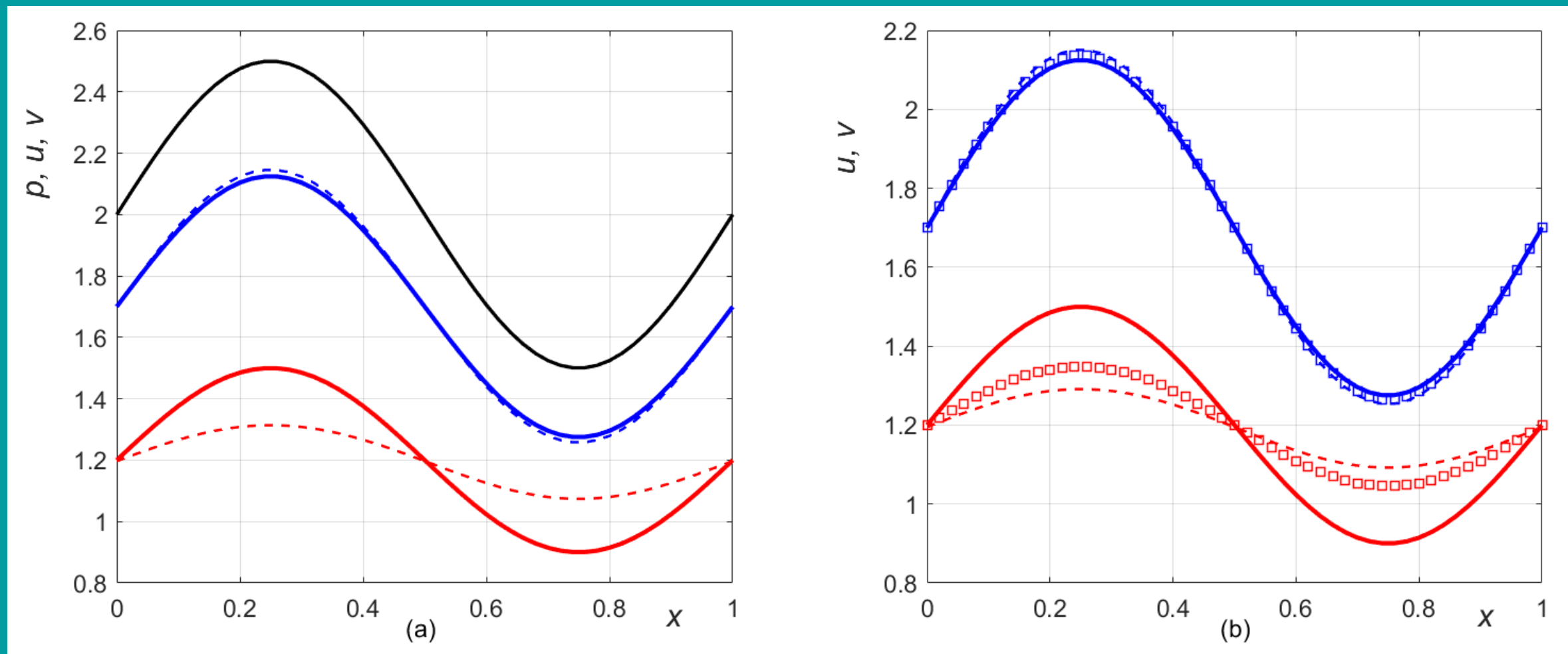
Будем строить асимптотическое приближение к решению возмущенной задачи (6) в виде рядов

$$\begin{cases} u \approx u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ v \approx v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \end{cases} \quad (9)$$

ограничиваясь первым поправочным членом приближения, будем иметь

$$\begin{cases} u \approx \frac{\lambda_2}{\mu_2} p - \frac{d_2}{\mu_2} p'' \\ v \approx \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) p + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(\frac{d_1}{\mu_1} + \frac{d_2 \lambda_1}{\mu_2} \right) p'' \end{cases} \quad (10)$$

Стационарные распределения (асимптотическое приближение)

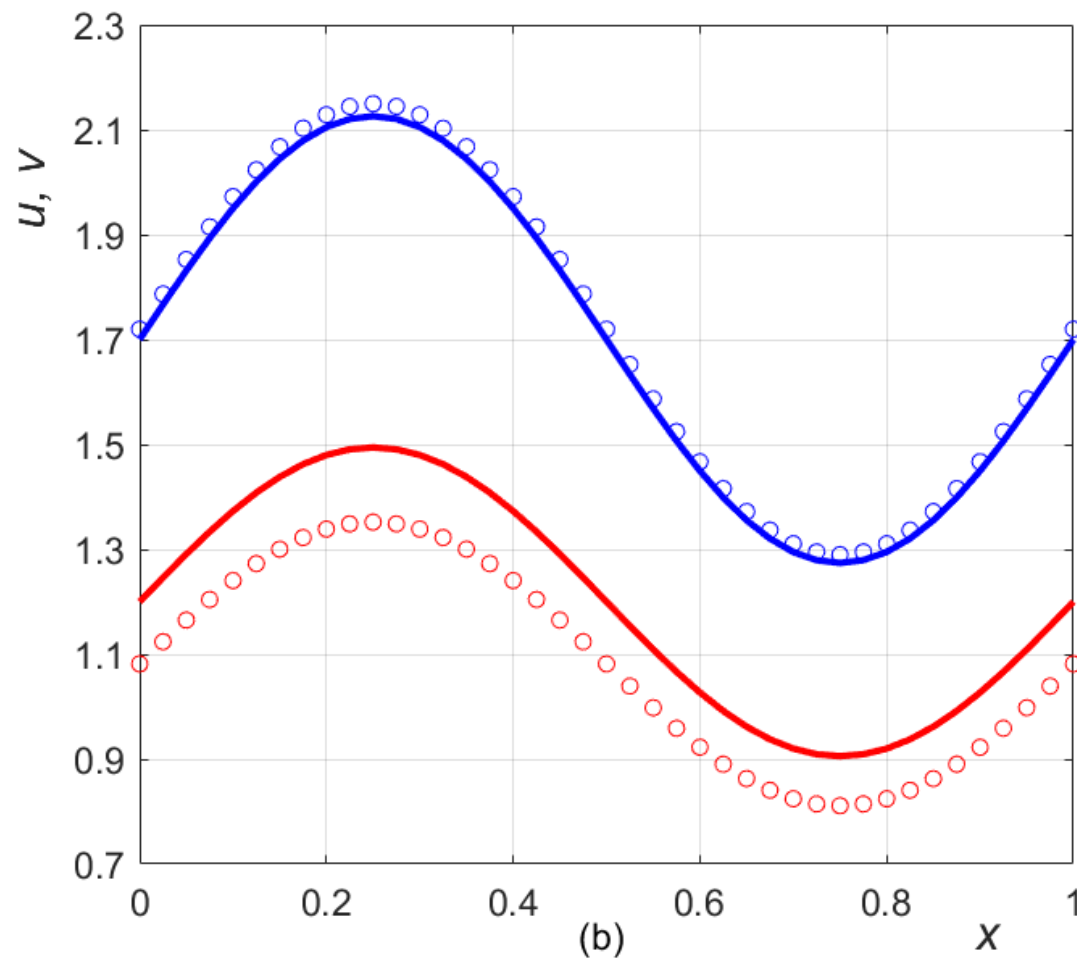
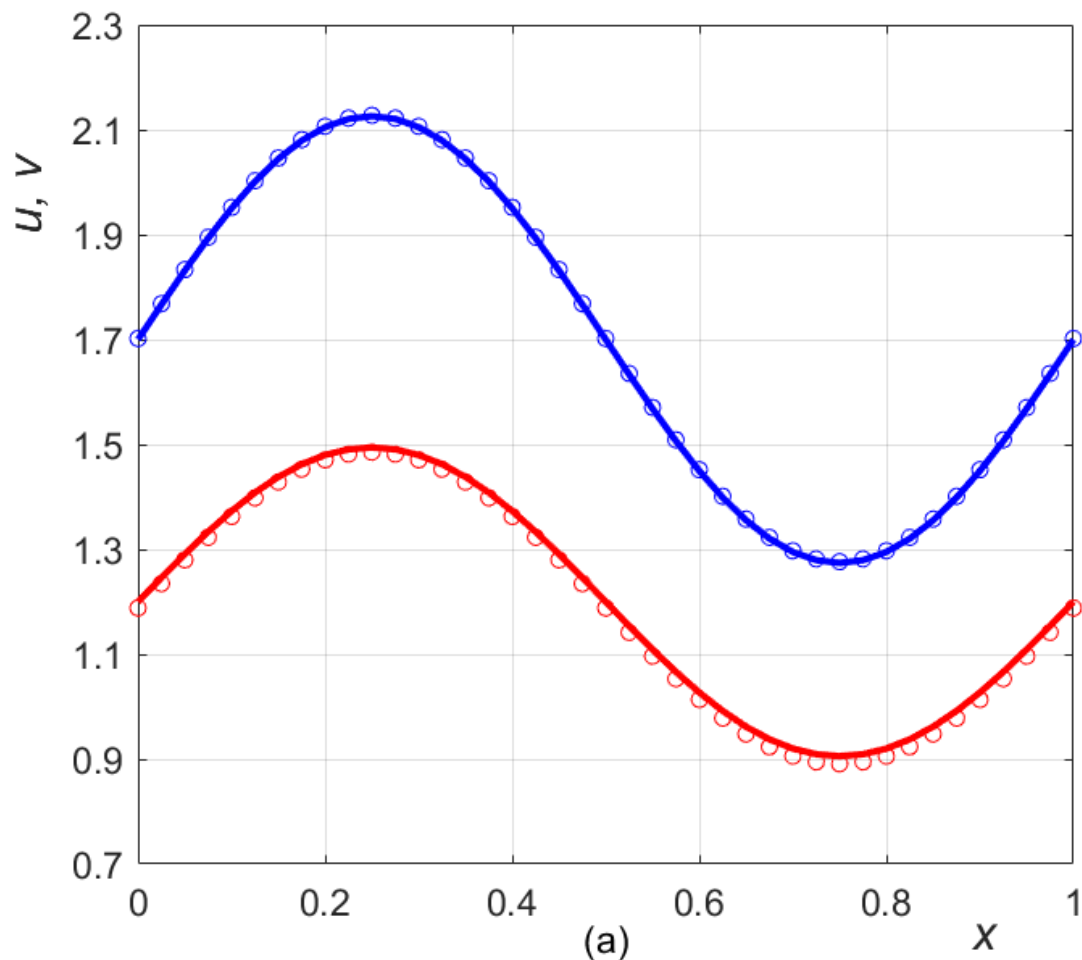


жертва - синяя кривая, хищник - красная, ресурс $p = 2 + 0.5\sin(2\pi x)$ - черная,
сплошные линии - без диффузии $\epsilon = 0, \mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.7$

(a) Сравнение с решением при диффузии $\epsilon = 0.005, \gamma = 1$ (пунктир),

(b) С двумя решениями при $\gamma = 0.5$ (квадратики) и $\gamma = 1.5$ (пунктир)

Сравнение асимптотического и численного решения



Численный расчет (сплошные линии), $\mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.7$
в сравнении с асимптотическими приближениями при диффузии (кружочки)

Пусть два вида являются конкурентами ($u = u_1, v = u_2$)

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 [p(x) - u_1 - \beta_1 u_2] \\ \frac{du_2}{dt} = d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_2 [p(x) - \beta_2 u_1 - u_2] \end{cases} \quad (11)$$

стационарное решение для вырожденной задачи будет иметь вид

$$u_1 = \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2} p, \quad u_2 = \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2} p \quad (12)$$

условие его устойчивости

$$\beta_1 < 1, \quad \beta_2 < 1 \quad (13)$$

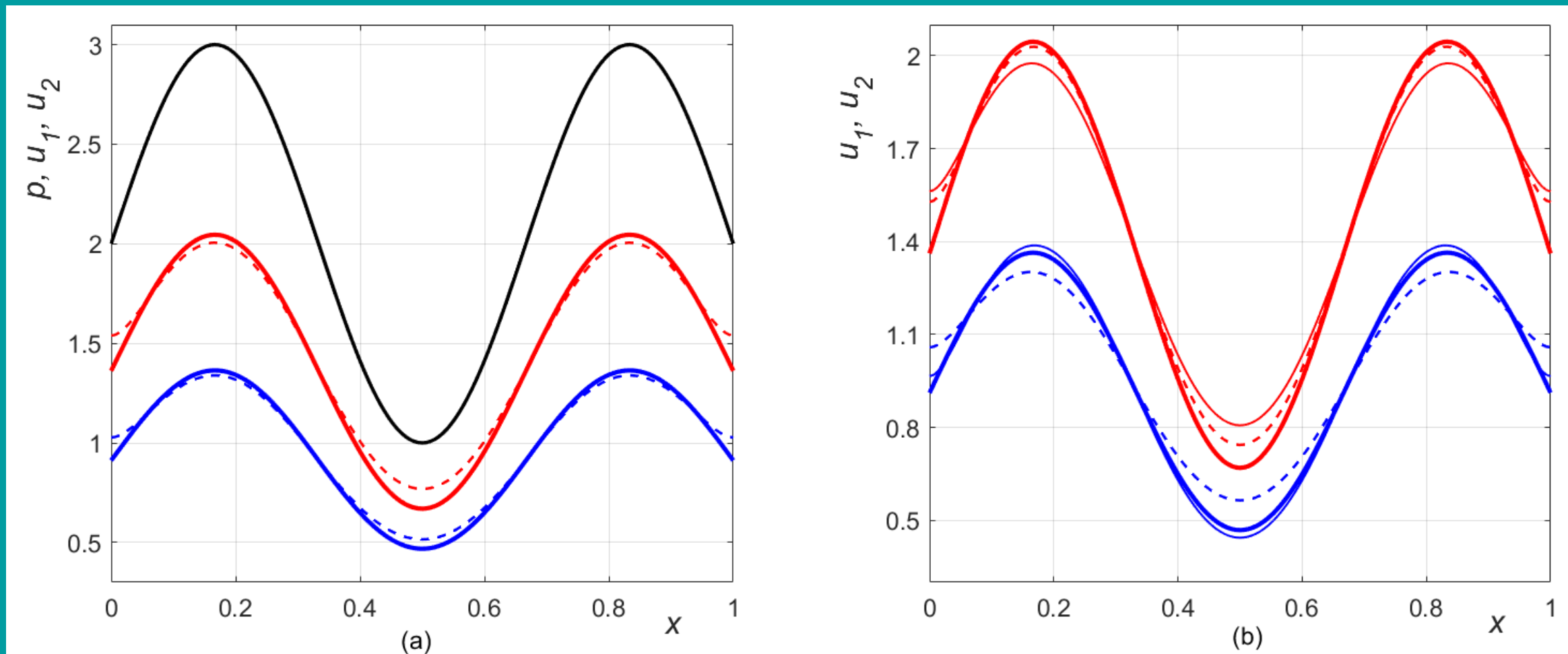
Будем строить асимптотическое приближение к решению возмущенной задачи (11) в виде рядов

$$\begin{cases} u_1 \approx u_{10} + \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots \\ u_2 \approx u_{20} + \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots \end{cases} \quad (14)$$

ограничиваясь первым поправочным членом приближения, будем иметь

$$\begin{cases} u_1 \approx \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2} p + \frac{p''}{p} \frac{(d_1 - \beta_1 d_2)}{(1 - \beta_1 \beta_2)}, \\ u_2 \approx \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2} p + \frac{p''}{p} \frac{(d_2 - \beta_2 d_1)}{(1 - \beta_1 \beta_2)}. \end{cases} \quad (15)$$

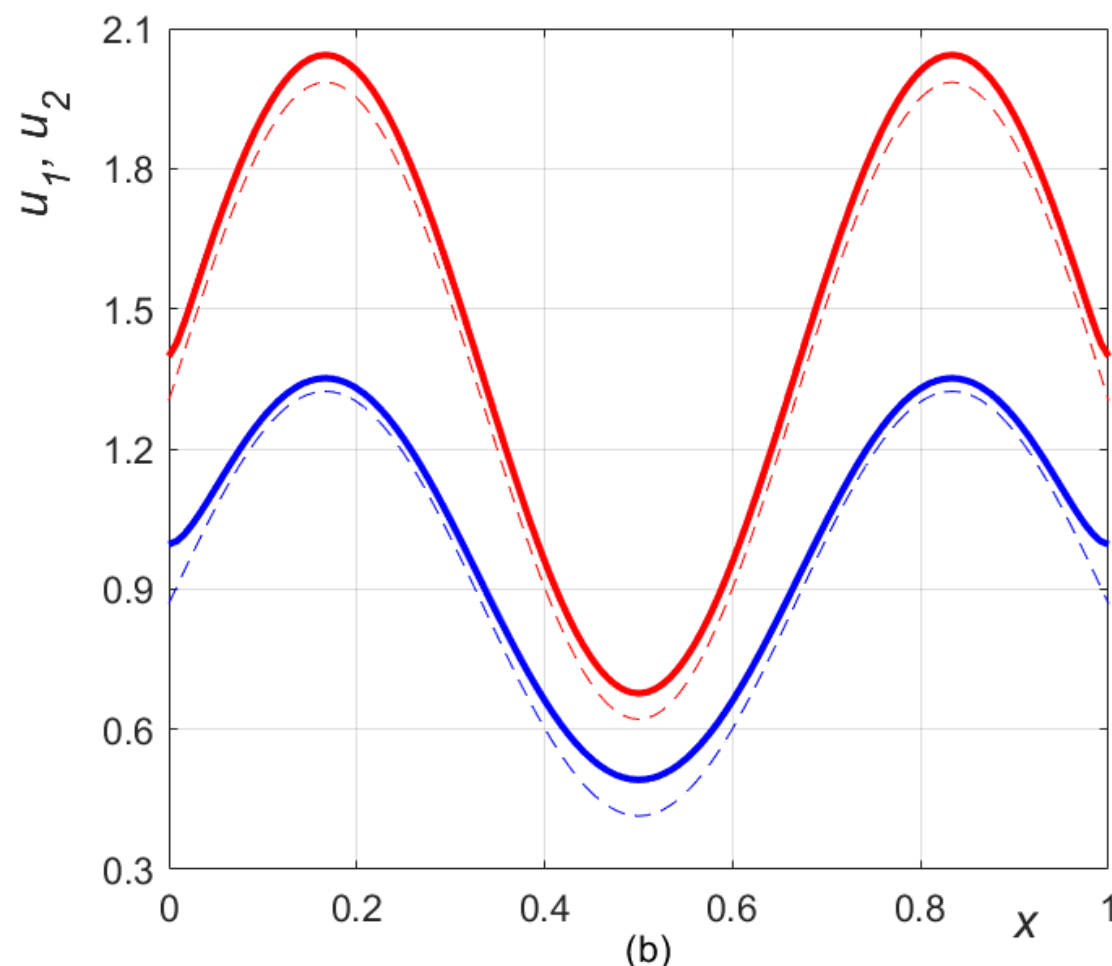
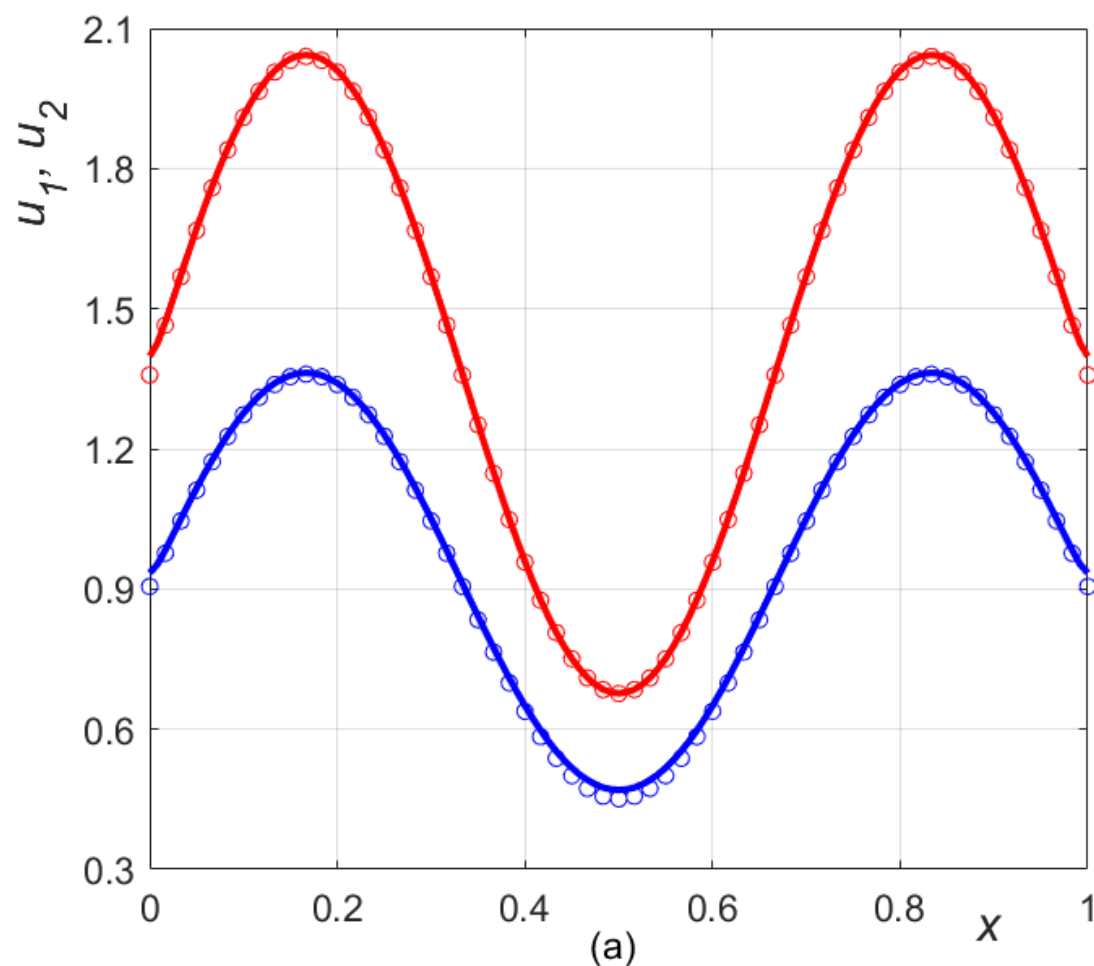
Стационарные распределения (асимптотическое приближение)



u_1 - красный, u_2 - синий, общий ресурс $p = 2 + \sin(3\pi x)$ - черный,
сплошные жирные линии – отсутствие диффузии $\varepsilon = 0, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.8$

(a) Сравнение с решением при диффузии $\varepsilon = 0.002, \gamma = 1$ (пунктирные кривые),
(b) С двумя решениями при $\gamma = 0.5$ (тонкие линии) и $\gamma = 1.5$ (пунктир)}

Сравнение асимптотического и численного решения



Численное решение (сплошные жирные линии) $\gamma = 1, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.8$
в сравнении с асимптотическими приближениями при диффузии
(a) $\epsilon = 0.0001$ (кружочки), (b) $\epsilon = 0.001$ (пунктир)

Пусть два вида взаимодействуют по принципу хищник-жертва и у популяции жертвы имеется сильный эффект Олли

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left[\mu_1 \left(1 - \frac{u}{p} \right) (u - a) - \lambda_1 \frac{v}{p} \right] \\ \frac{dv}{dt} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \left[\mu_2 \frac{u}{p} - \lambda_2 \right] \end{cases} \quad (16)$$

стационарное решение для вырожденной задачи будет иметь вид

$$u = \frac{\lambda_2}{\mu_2} p, \quad v = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} p - a \right) p \quad (17)$$

условие его устойчивости

$$\frac{\mu_2(p + a)}{2p} < \lambda_2 < \mu_2 \quad (18)$$

Будем строить асимптотическое приближение к решению возмущенной задачи (16) в виде рядов

$$\begin{cases} u \approx u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ v \approx v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \end{cases} \quad (19)$$

ограничиваясь первым поправочным членом приближения, будем иметь

$$\begin{cases} u \approx \frac{\lambda_2}{\mu_2} p - \frac{d_2}{\mu_2} p'' \\ v \approx \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} p - a \right) p + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left[\frac{d_1}{\mu_1} - \frac{d_2 p}{\mu_2} \left(1 - \frac{2\lambda_2}{\mu_2} + \frac{a}{p} \right) \right] p'' \end{cases} \quad (20)$$

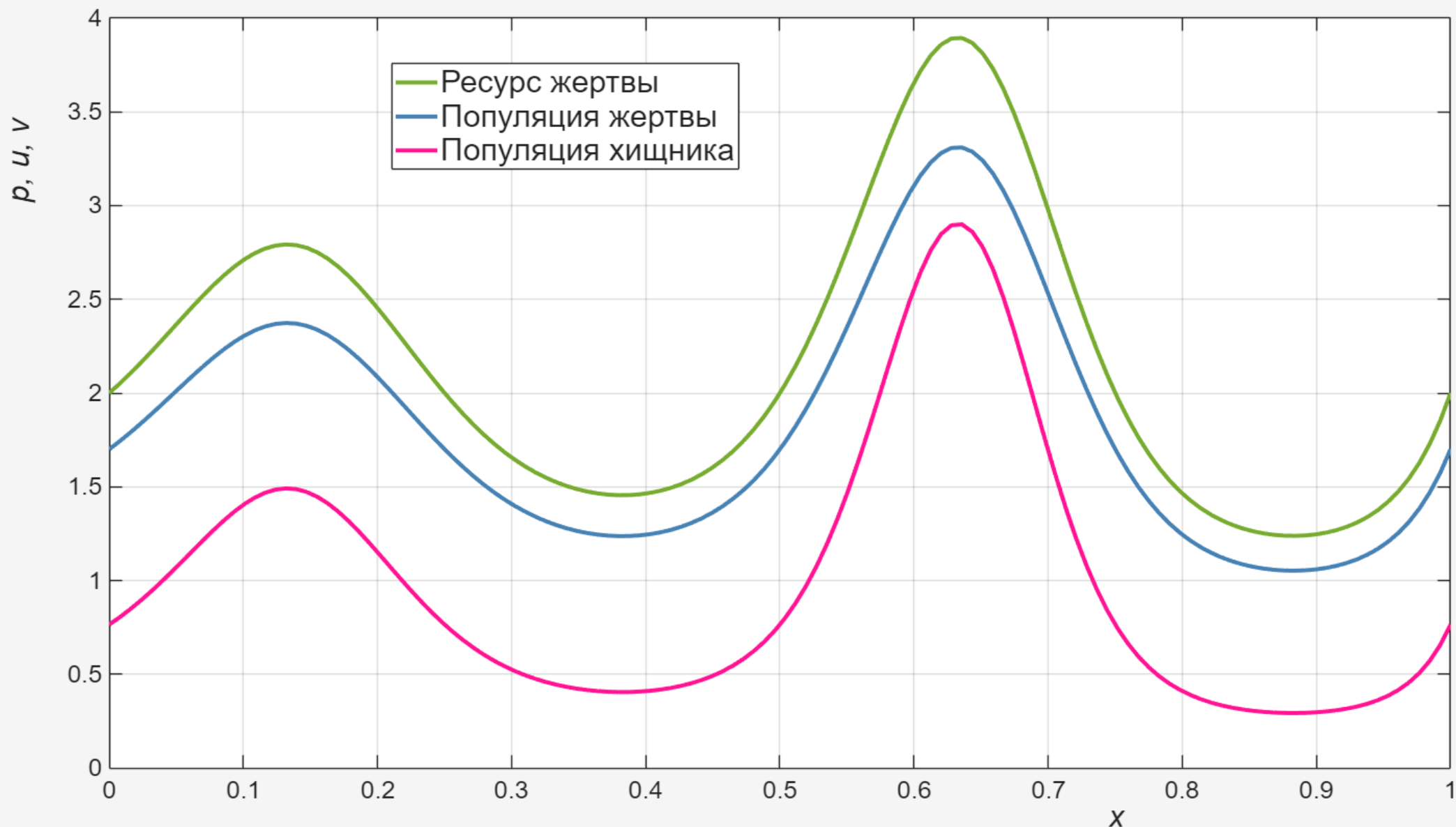
Стационарные распределения

$$\mu_1 = 1,5$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1,7$$



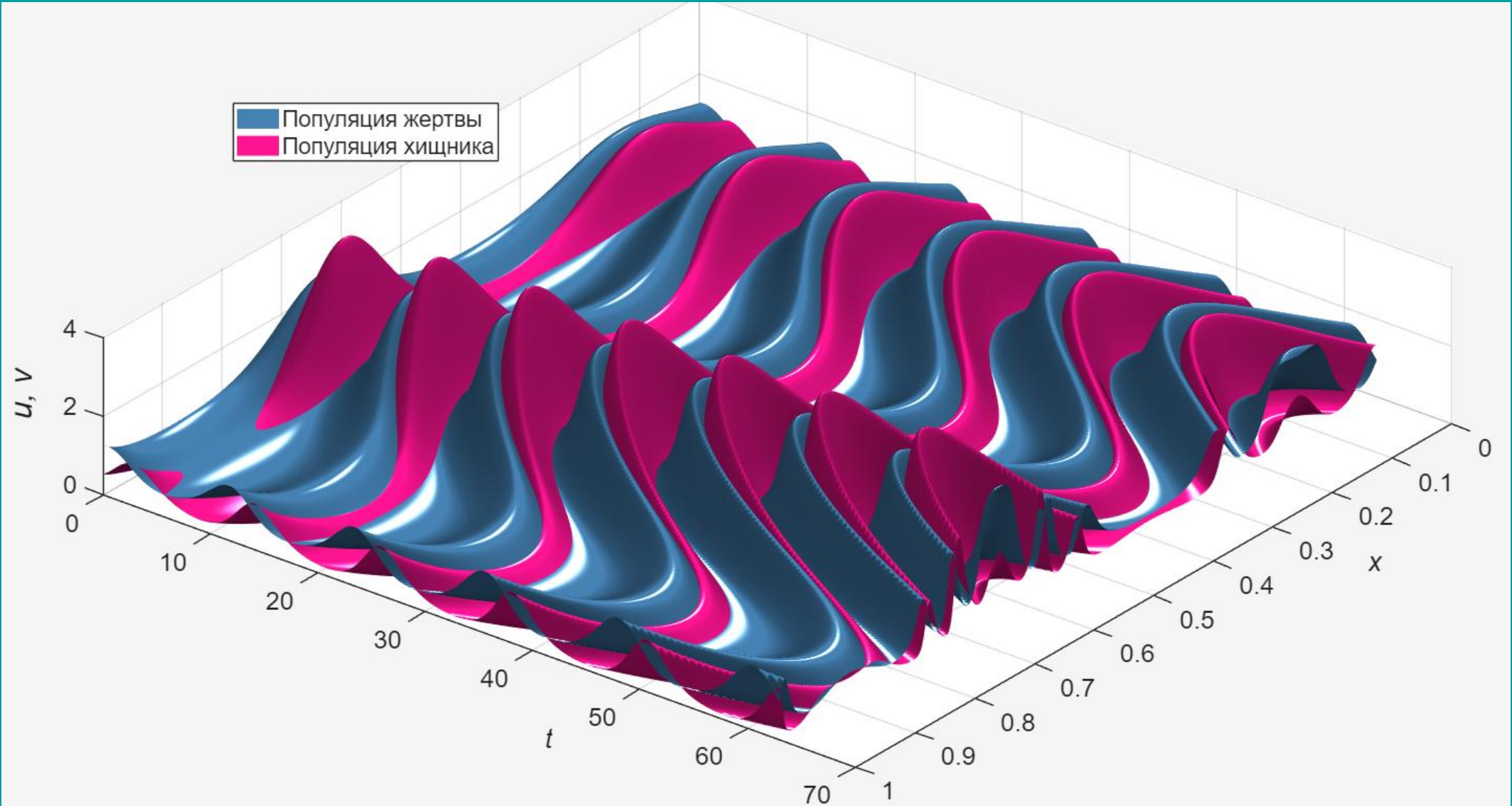
Осциллирующий режим (в системе без диффузии)

$$\mu_1 = 0,8$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1,2$$

$$\lambda_2 = 0,9$$



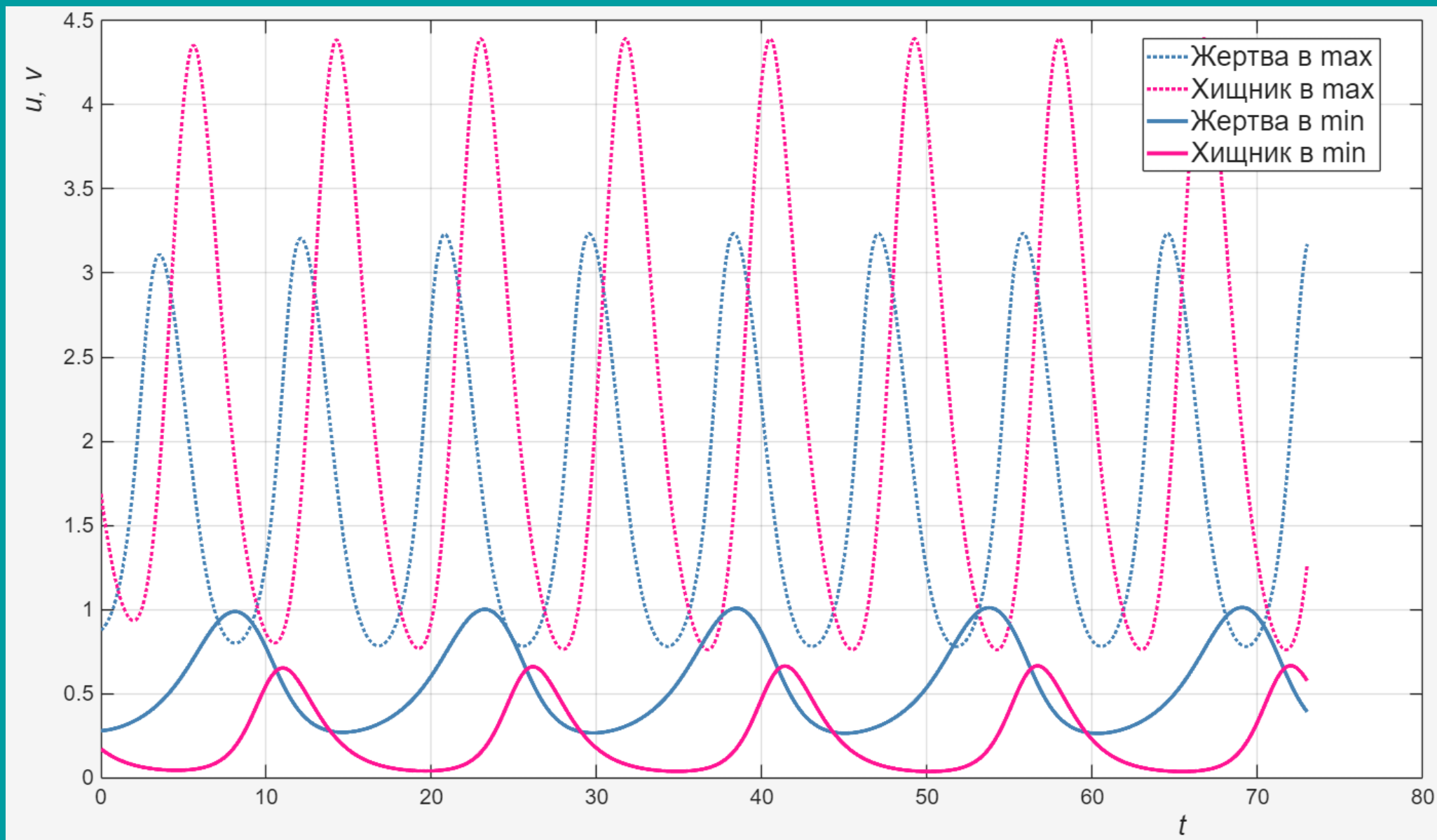
Осциллирующий режим для двух точек ареала (без диффузии)

$$\mu_1 = 0,8$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1,2$$

$$\lambda_2 = 0,9$$



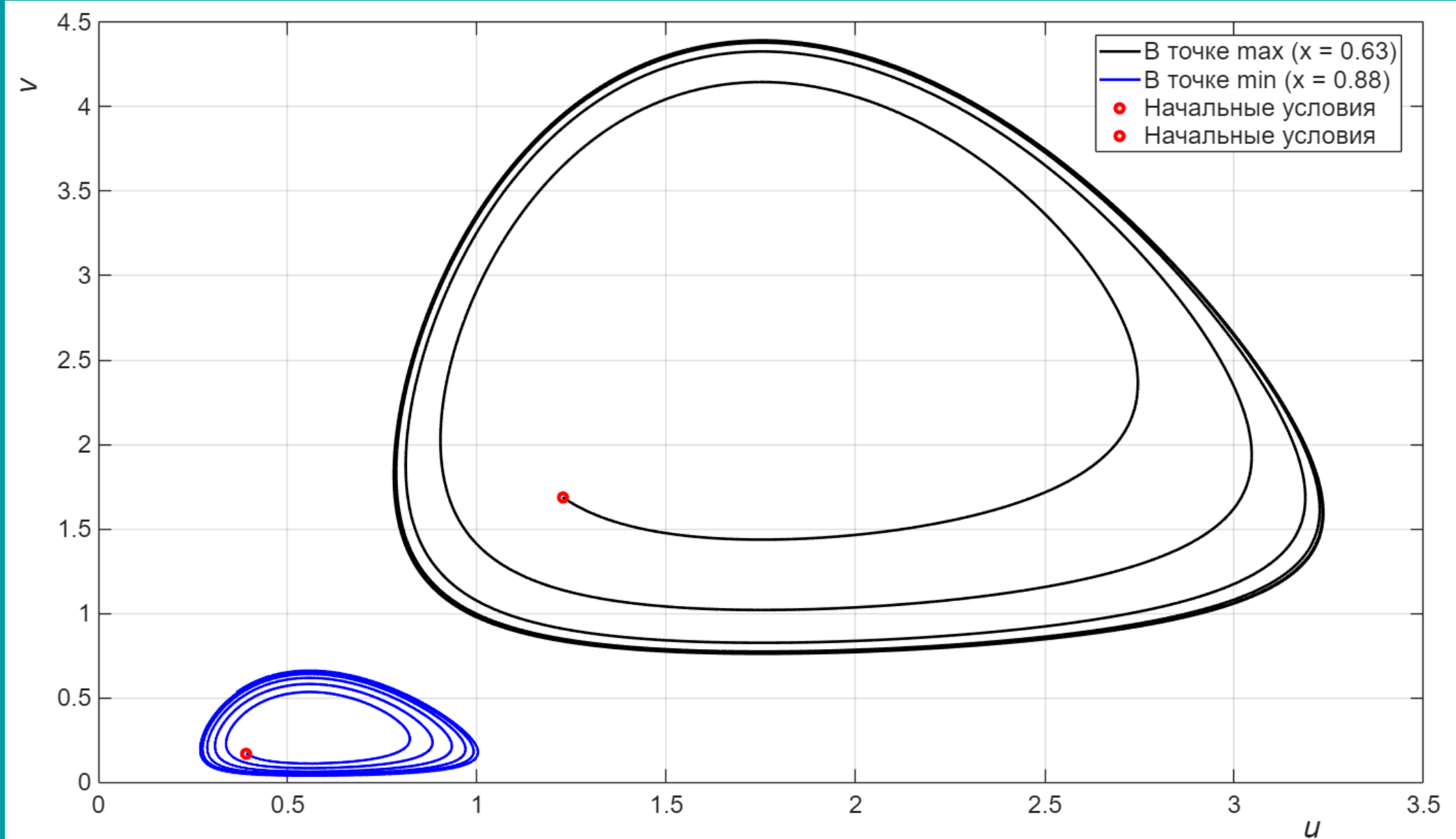
Фазовый портрет

$$\mu_1 = 0,8$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1,2$$

$$\lambda_2 = 0,9$$



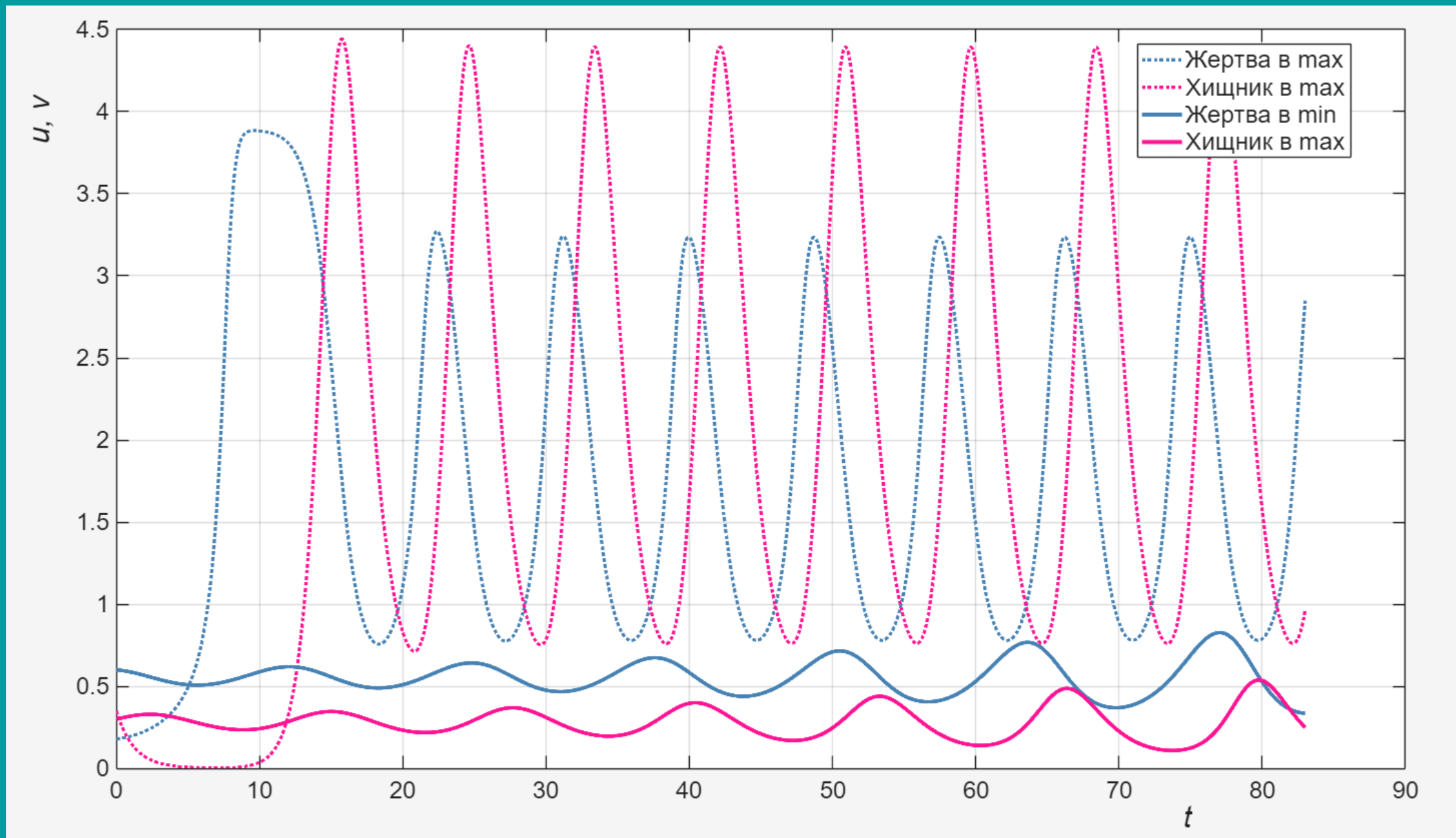
Осциллирующий режим для двух точек ареала (без диффузии)

$$\mu_1 = 0,9$$

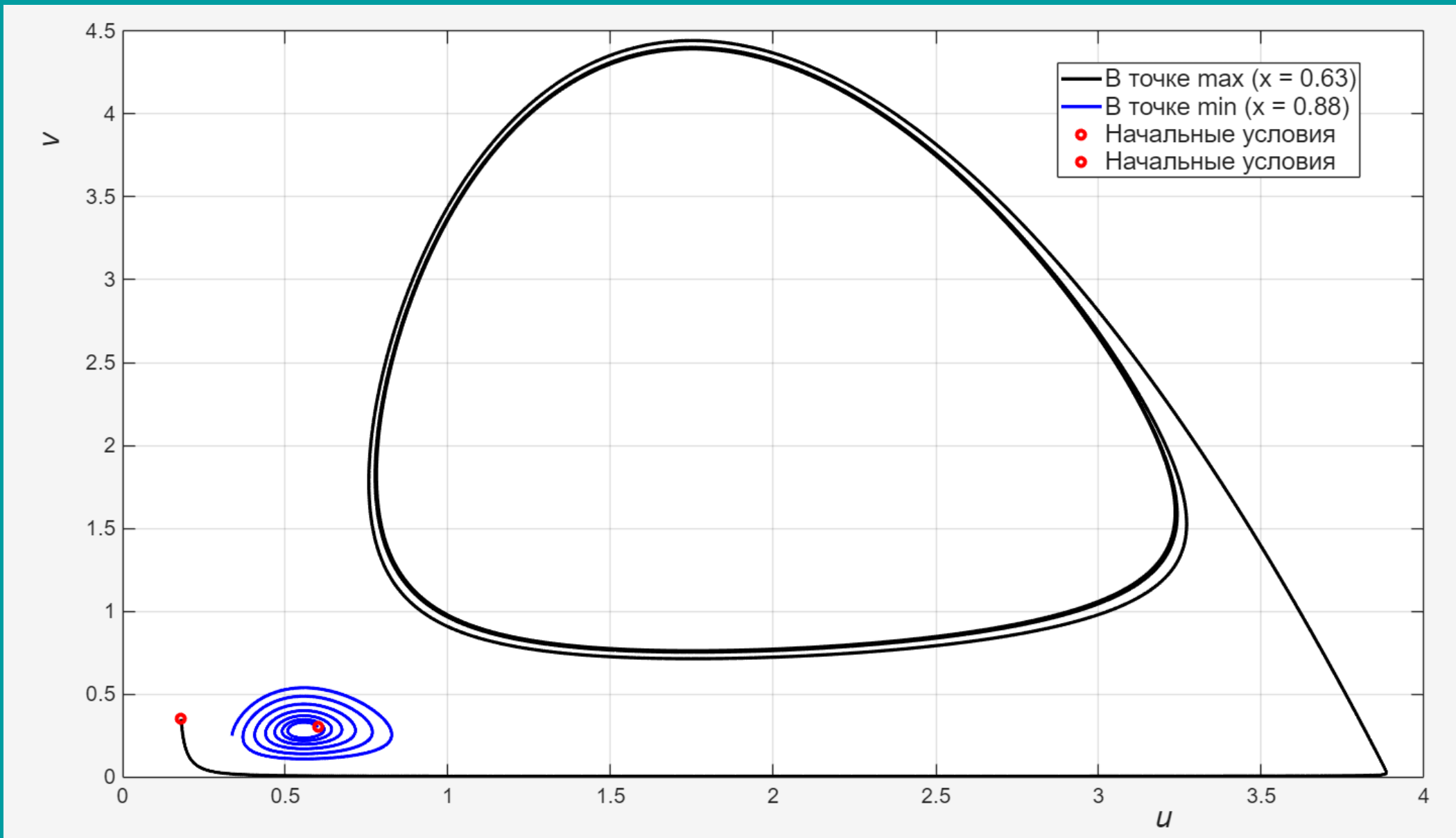
$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1,2$$

$$\lambda_2 = 0,9$$



Фазовый портрет



$$\mu_1 = 0,9$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1,2$$

$$\lambda_2 = 0,9$$

Локально-осциллирующий режим

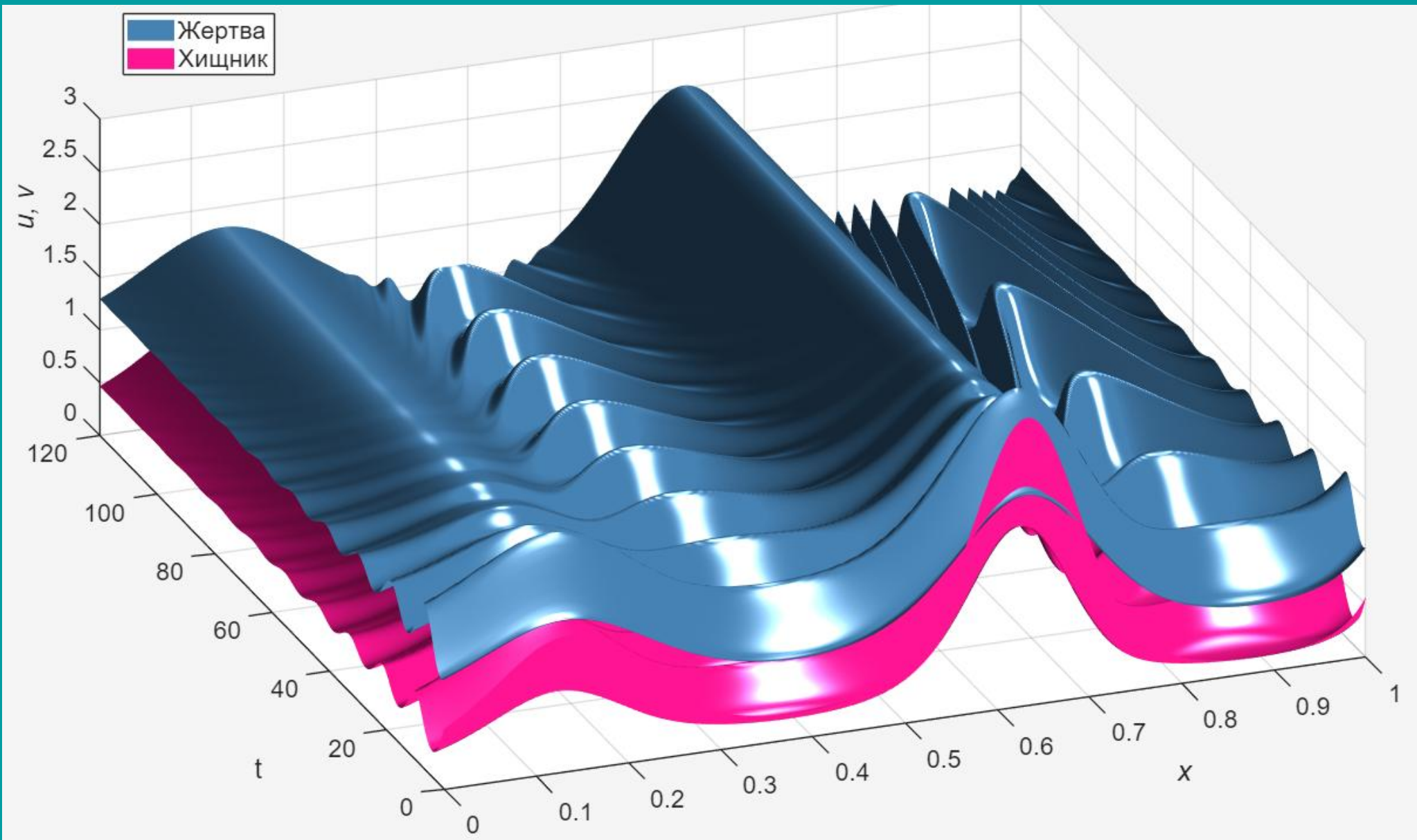
$$\mu_1 = 0,8$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1,3$$

$$a = 0,45$$



Локально-осциллирующий режим

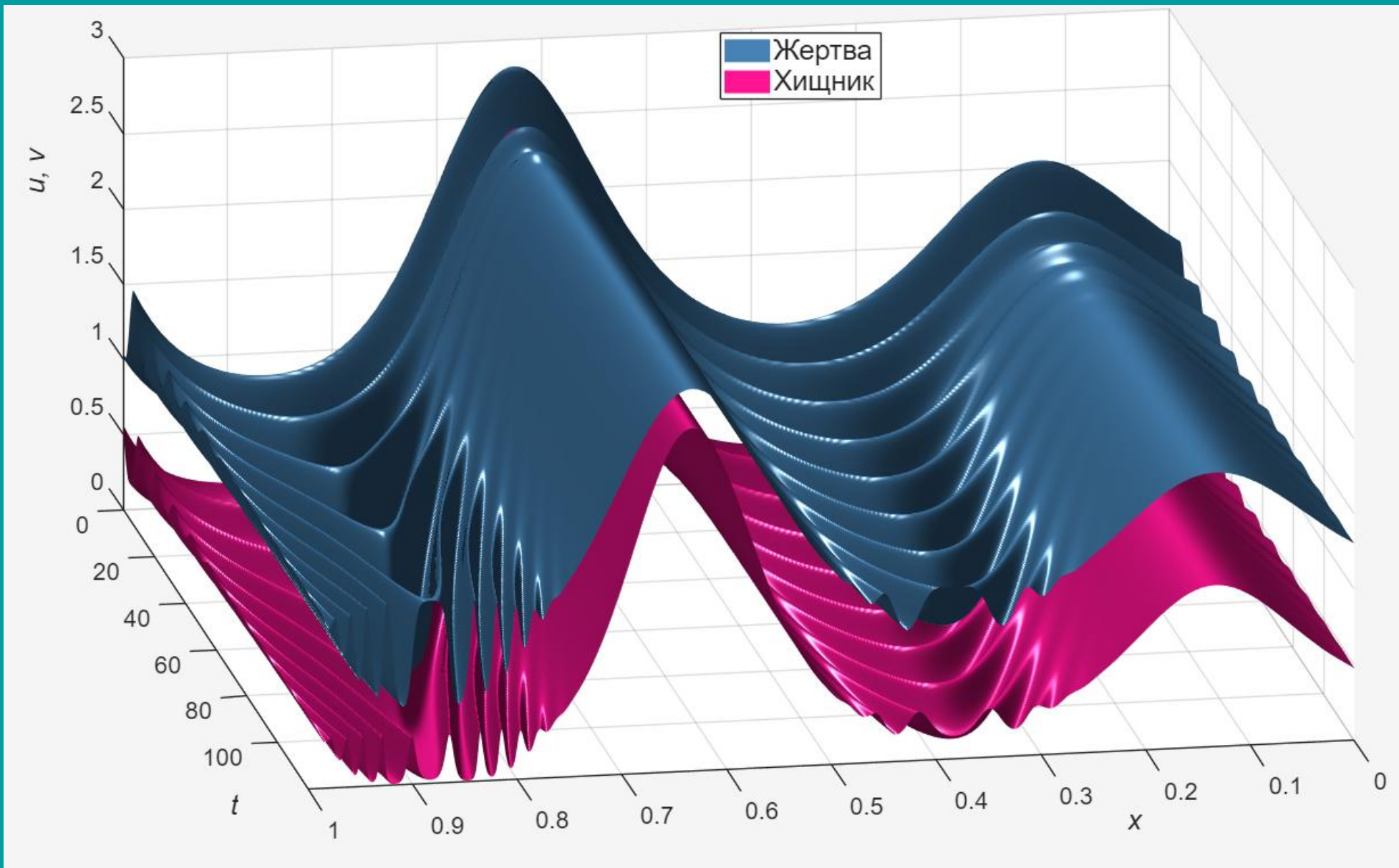
$$\mu_1 = 0,8$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1,3$$

$$a = 0,45$$



Локально-осциллирующий режим

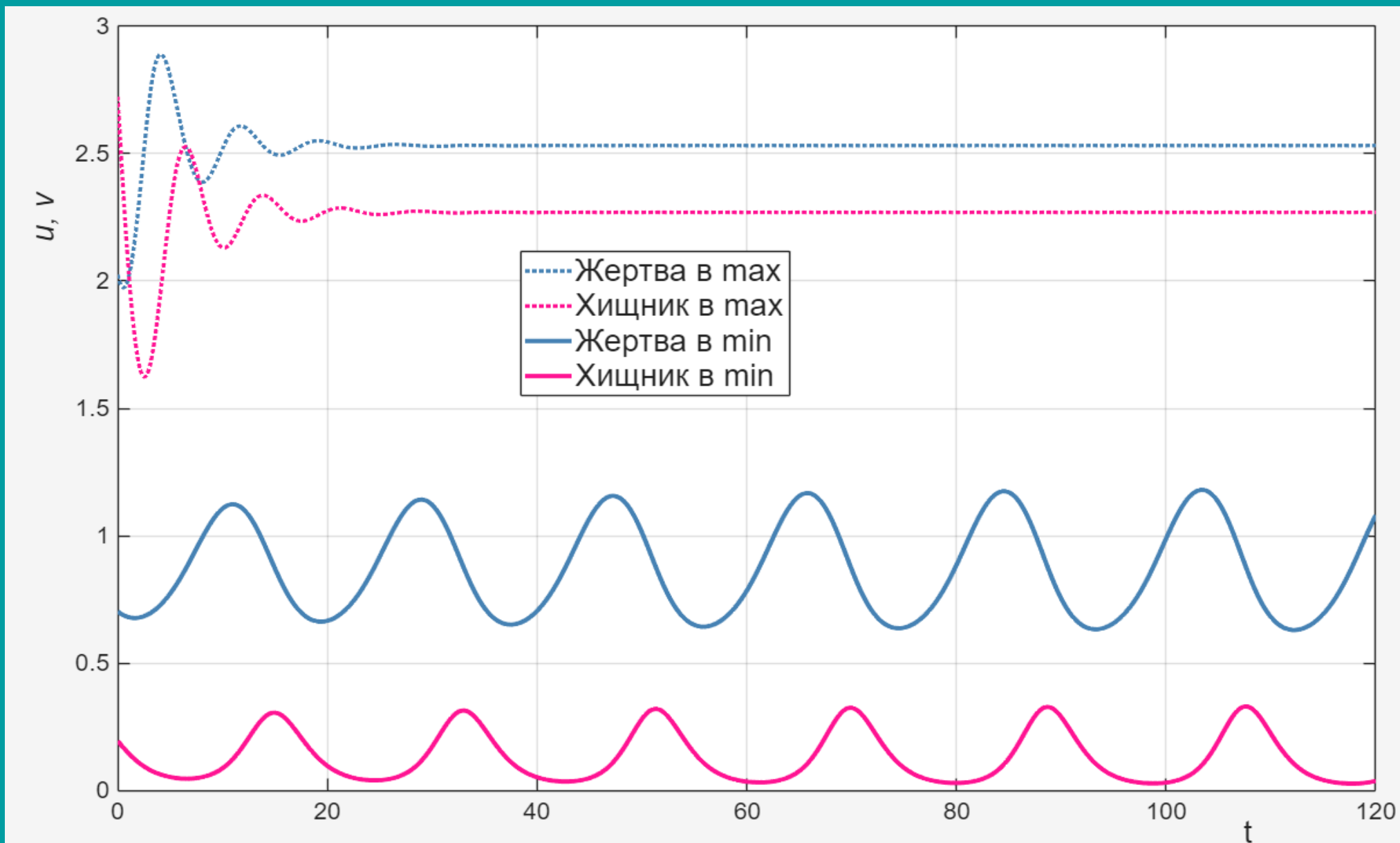
$$\mu_1 = 0,8$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1,3$$

$$a = 0,45$$



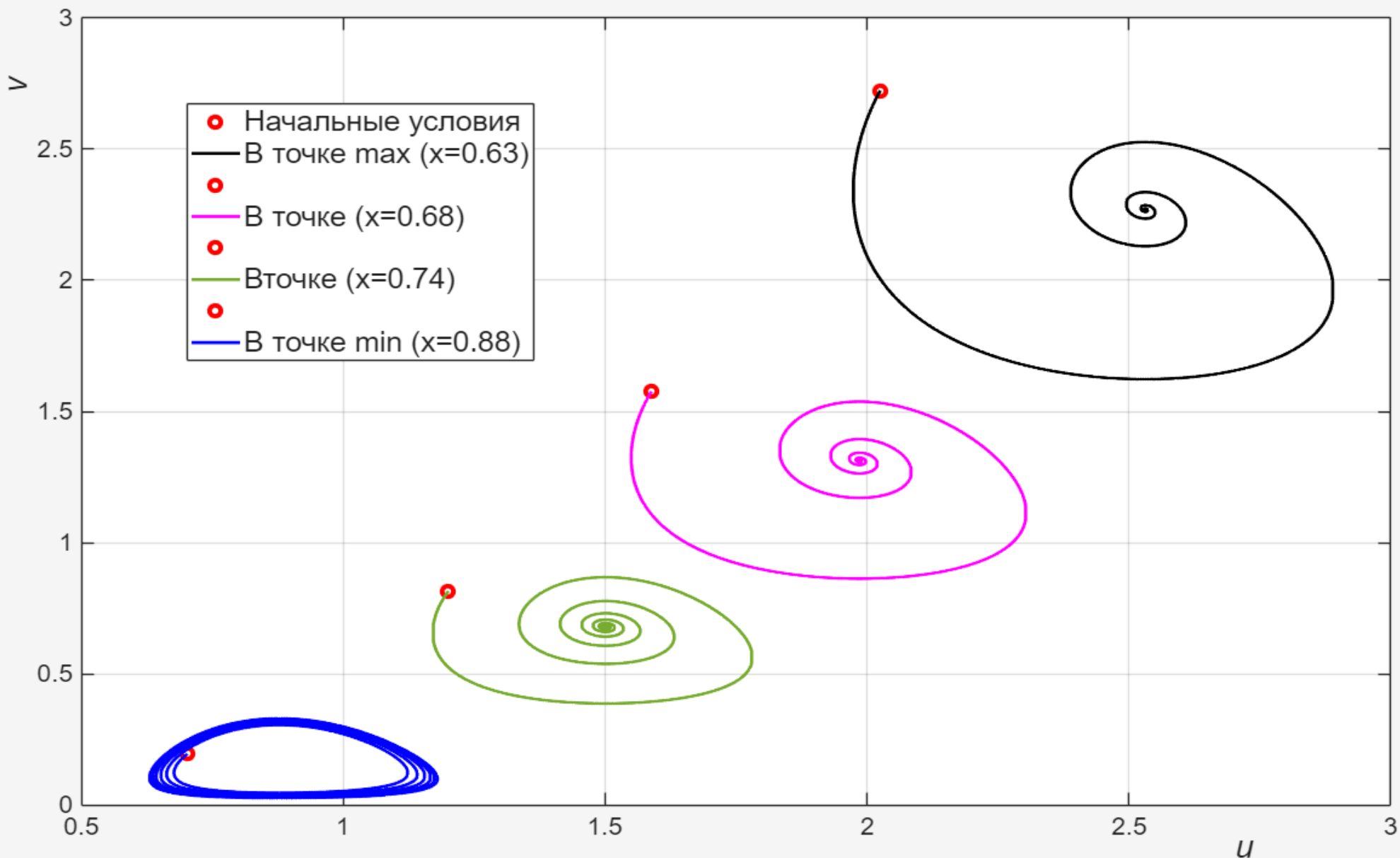
Сравнение фазовых портретов

$$\mu_1 = 0,8$$

$$\mu_2 = 2$$

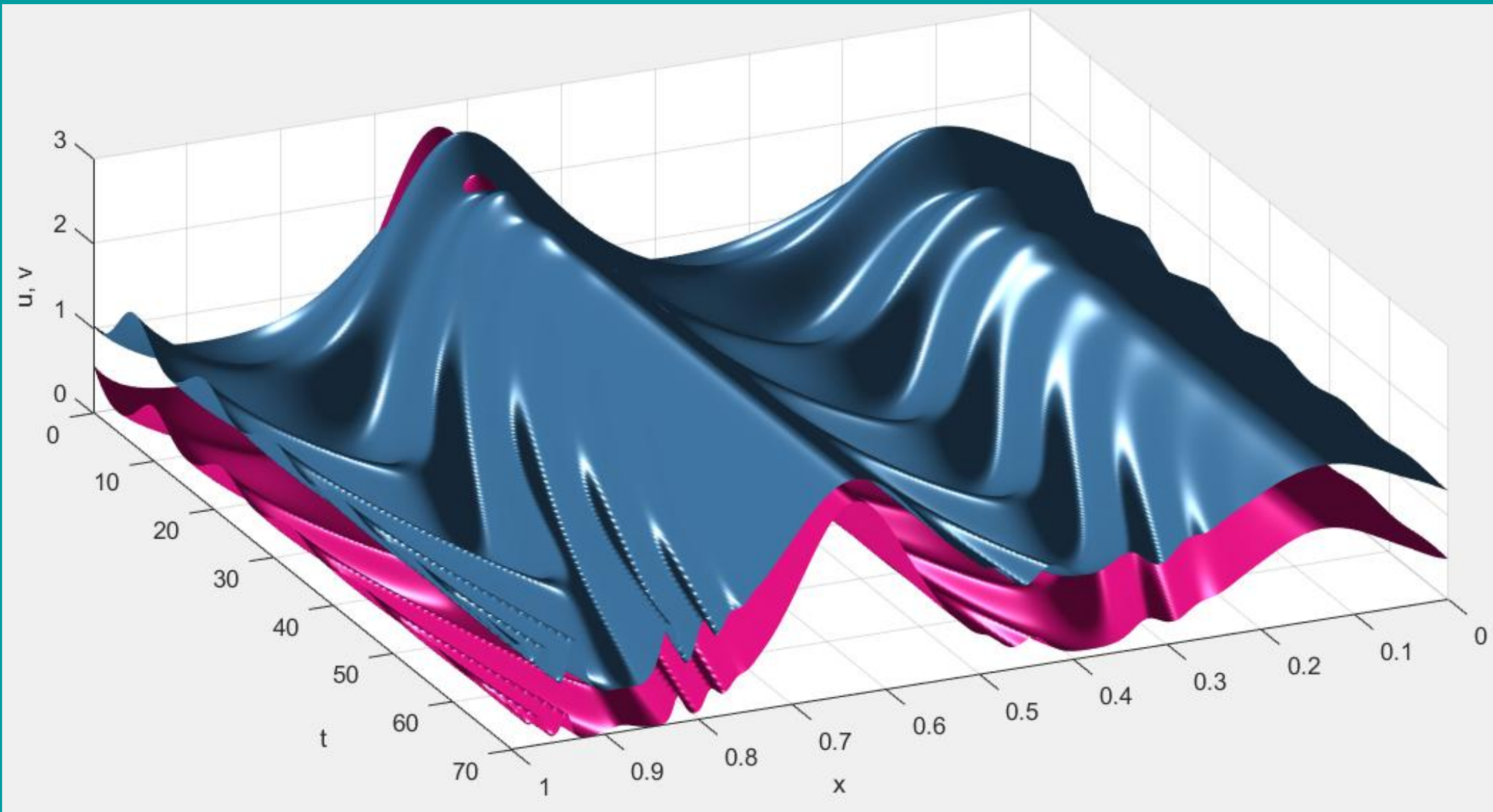
$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1,3$$



Локально-осциллирующий режим в системе с малой диффузией

$\mu_1 = 0,8$
 $\mu_2 = 2$
 $\lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 = 1,3$
 $a = 0,45$
 $\varepsilon = 0,001$



Построены асимптотические приближения к стационарным решениям уравнений диффузии-реакции для систем хищник-жертва и двух конкурирующих популяций с ИСР.

Неоднородный ареал оказывает существенное влияние на динамику модели хищник-жертва, особенно если система имеет дополнительные нелинейные эффекты (сильный эффект Олли).

Показано, что нарушение условий устойчивости стационарного состояния может приводить к формированию пространственно-локализованных осциллирующих режимов, положение которых определяется локальными минимумами обобщенной функции ресурса.

Полученные результаты указывают на принципиальную возможность построения ЭСС посредством модификации профиля ресурса и выбора параметров взаимодействия.

Благодарности

**Работа выполнена в Научно-технологическом
университете «Сириус»**

при поддержке РФФ, грант № 25-21-00419.